Teoría Cohomológica de las Variedades Algebraicas Abstractas

Por Alexander Grothendieck

Hace menos de cuatro años que los métodos cohomológicos (es decir, los métodos del Álgebra Homológica) fueron introducidos en Geometría Algebraica por el artículo fundamental de Serre [**11**], y ya parece cierto que van a arrasar esta parte de las matemáticas en los años venideros, desde los fundamentos hasta las partes más avanzadas. Todo que lo que podemos hacer aquí es resumir brevemente algunas ideas y resultados. Ninguno de ellos ha sido publicado en su forma definitiva, pero muchos de ellos se originaron o fueron sugeridos por el artículo de Serre.

Demos primero un esquema de los principales temas de investigación cohomológica en Geometría Algebraica, como aparecen en el presente. La necesidad de una teoría cohomológica para las variedades algebraicas 'abstractas' fue enfatizada primero por Weil, para poder dar un significado preciso a sus célebres conjeturas en Geometría Diofantina [**20**]. Así pues el objetivo inicial era encontrar la *'cohomología de Weil' de una variedad algebraica*, que debería tener como coeficientes algo 'al menos tan bueno' como un cuerpo de *característica* 0, y tener propiedades formales (por ej. dualidad, fórmula de Künneth) tales que proporcionaran un análogo a la 'fórmula de puntos fijos' de Lefschetz. La idea general de Serre ha sido que la 'topología de Zariski' usual de una variedad (en la que los cerrados son los conjuntos algebraicos) es adecuada para aplicar los métodos de la Topología Algebraica. Su primera aproximación esperaba proporcionar al menos los números de Betti correctos de una variedad, siendo evidente desde el principio que no podría ser considerada como la cohomología de Weil propiamente dicha, ya que el cuerpo de coeficientes de cohomología era el cuerpo base de la variedad, y por ello en general de característica no nula. De hecho, incluso la misión de conseguir los *números de Betti* 'correctos' ha fracasado, igual que otros intentos de Serre [**12**] de construir la cohomología de Weil tomando la cohomología de la variedad con valores, no en el haz de anillos locales, sino en los haces de vectores de Witt construidos en este último. De esta manera construye módulos sobre el anillo $W(k)$ de vectores de Witt infinitos sobre el cuerpo base k, y $W(k)$ es un anillo de característica 0 incluso cuando k tiene característica $p \neq 0$. Desgraciadamente, los módulos así obtenidos sobre $W(k)$ pueden ser infinitamente generados, aun cuando la variedad V es abeliana [**13**]. Aunque ciertamente deben existir relaciones interesantes entre estos grupos de cohomología y los 'correctos', parece claro ahora que la cohomología de Weil tiene que definirse desde un enfoque completamente diferente. Un enfoque así me fue recientemente sugerido por las *conexiones entre cohomología de haces y cohomología de grupos de Galois por un lado, y la clasificación de revestimientos no ramificados de una variedad por el otro* (como se explica no muy sistemáticamente en el artículo tentativo de Serre en México), y por la idea de Serre de que un fibrado principal algebraico 'razonable' con grupo estructural G, definido en una variedad V, si no es localmente trivial, debería volverse localmente trivial en algún revestimiento de V *no ramificado* sobre un punto dado de V. Este ha sido el punto de partida de una definición de la cohomología de Weil (implicando tanto la cohomología 'espacial' como la de Galois), que parece ser la correcta, y que da sugerencias claras sobre cómo deberían atacarse las conjeturas de Weil con la maquinaria del Álgebra Homológica. Como todavía no he comenzado estas investigaciones seriamente, y además esta teoría tiene un sabor muy distinto del de la teoría de haces algebraicos coherentes de la que nos ocuparemos ahora, no insistiremos más en la cohomología de Weil. Destaquemos solamente que la definición aludida ya ha sido el punto de partida de una teoría de la dimensión cohomológica de los cuerpos, desarrollada recientemente por Tate [**18**].

El segundo tema principal en los métodos cohomológicos es la *teoría cohomológica de los haces algebraicos coherentes*, iniciada por Serre. Aunque inadecuada para los propósitos de Weil, está proporcionando gran variedad de nuevos métodos y nociones, y da la clave para obtener resultados incluso considerados como alejados de los haces, mucho más de la cohomología, como el teorema de Zariski sobre 'funciones holomorfas' y su 'teorema principal' - que ahora se puede enunciar de forma más satisfactoria, como veremos, y probar con los mismos métodos elementales. Las partes más importantes de la teoría, en la actualidad, son las siguientes:

(a) Teoremas generales de finitud y comportamiento asintótico.
(b) Teoremas de dualidad, incluyendo (y siendo idénticos a) una teoría cohomológica de los residuos.
(c) Teorema de Riemann-Roch, incluyendo la teoría de clases de Chern para haces algebraicos coherentes.
(d) Algunos resultados especiales, relacionados con las variedades abelianas.

El tercer tema principal consiste en la *aplicación de los métodos cohomológicos al álgebra local*. Iniciada por Koszul y Cartan-Eilenberg en conexión con el 'teorema de las sizigias' de Hilbert, el uso sistemático de estos métodos se debe sobre todo a Serre. Los resultados son la *caracterización* de los anillos locales regulares como aquellos cuya dimensión cohomológica global es finita, la aclaración del *teorema de equidimensionalidad de Cohen-Macaulay* por medio de la noción de *codimensión cohomológica* [**23**], y especialmente la posibilidad de dar (por primera vez según parece) una *teoría de intersecciones*, realmente satisfactoria por su simplicidad algebraica y generalidad. El resultado de Serre recién mencionado, sobre que los anillos locales regulares son los únicos con dimensión cohomológica global finita, da cuenta del hecho de que solo para esos anillos existe una teoría de intersecciones satisfactoria. No puedo entrar en detalles sobre estos temas, ni sobre varios resultados que he obtenido por medio de una *teoría de dualidad local*, que parece ser la herramienta que va a reemplazar a las formas diferenciales en el caso de características distintas, y da, en el contexto general del álgebra conmutativa, una aclaración de la noción de residuo, que todavía no se entendía bien. La motivación de este último trabajo ha sido el intento de conseguir una teoría de dualidad global en cohomología para variedades algebraicas con singularidades arbitrarias, para poder desarrollar fórmulas de intersección para ciclos con singularidades arbitrarias, en una variedad algebraica no singular, fórmulas que contienen también una 'fórmula de Lefschetz mod. p' [**8**]. De hecho, una vez se tiene un formalismo local adecuado, parece que, en buena medida, los resultados 'locales' ya contienen uno global, más precisamente, los resultados globales en variedades de dimensión n frecuentemente pueden deducirse de resultados locales para anillos con dimensión de Krull $n+1$.

Así pues pasaremos ahora a dar algunas ideas importantes del segundo tema, es decir, sobre la teoría cohomológica de haces algebraicos coherentes. Sin embargo, antes me gustaría enfatizar una cuestión común a *todos* los temas que consideramos (excepto quizás para (d)), y de hecho a todas las técnicas estándar en Geometría Algebraica. Concretamente, que el rango natural de nociones tratadas, y los métodos usados, no son realmente variedades algebraicas. Por tanto, sabemos que una variedad algebraica *afín* sobre k está determinada por su anillo de coordenadas, que es una k-álgebra finitamente generada sin elementos nilpotentes; así pues, toda afirmación sobre variedades algebraicas afines es puede interpretar como una afirmación sobre anillos A del tipo anterior. Entonces se revela que muchas de tales afirmaciones tienen sentido, y son ciertas, si asumimos solo que A es un anillo conmutativo con unidad, siempre y cuando impongamos alguna restricción leve, como que sea noetheriano, por ejemplo. De la misma forma, la mayoría de resultados probados para los anillos locales de la geometría algebraica tienen sentido para anillos locales noetherianos arbitrarios. Además, muchas veces ocurre que cuando parece a primera vista que una afirmación solo tiene sentido cuando hay un cuerpo base k, o en cuestiones en las que se consideran formas diferenciales, una consideración más profunda muestra que esta impresión es incorrecta, y que se obtiene una comprensión mejor reemplazando k por un anillo B tal que A sea una B-álgebra finitamente generada. Geométricamente, esto significa que en vez de considerar una sola variedad algebraica V (definida por A), consideramos una 'aplicación regular' o 'morfismo' de V en otra variedad afín W, y las propiedades de la variedad V se pueden generalizar a propiedades de un morfismo $V \to W$ (la noción 'absoluta' para V se obtiene de la noción 'relativa' más general tomando como W un único punto). Por otro lado, no se debería prohibir que los anillos tengan elementos nilpotentes, y de ninguna manera excluirlos sin razones serias. Igual que todo anillo conmutativo se puede considerar como una generalización apropiada de variedad algebraica *afín*, se puede encontrar una generalización adecuada correspondiente para variedades algebraicas abstractas (definidas sobre un cuerpo cualquiera). Esto es lo que hizo Nagata [**9**] en un caso particular, aun siguiendo la definición de esquema dada por Chevalley [**4**], se tuvo que restringir al caso irreducible, sin considerar elementos nilpotentes. El principio de la definición correcta de nuevo se encuentra en el artículo fundamental de Serre [**11**], y es el siguiente. Si A es un anillo conmutativo cualquiera, el conjunto $\mathcal{S}pec(A)$ de todos los ideales primos de A se puede convertir en espacio topológico del modo clásico, llamando cerrados a los subconjuntos de ideales primos que contienen cierto subconjunto de A. Por otro lado, hay un haz de anillos definido de forma natural en $\operatorname{Spec}(A)$, cuya fibra en un punto p es el anillo local A_p. Más generalmente, todo módulo M sobre A define un haz de módulos en $\operatorname{Spec}(A)$, cuya fibra en un punto p es el módulo localizado M_p sobre A_p. Ahora, llamamos *esquema* a todo espacio topológico X con un haz de anillos $\mathcal{O}_X$ en X, llamado su *haz estructural*, tal que todo punto de X tiene un entorno abierto isomorfo a cierto $\operatorname{Spec}(A)$. Si X e Y son esquemas, un *morfismo* f de X en Y es una aplicación continua $f : X \to Y$, junto con un morfismo asociado $f^* : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ entre los haces estructurales, sometido a la condición: si $x \in X$, $y = f(x)$, entonces la imagen inversa por $f^* : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ del ideal maximal en $\mathcal{O}_{X,x}$ es el ideal maximal en $\mathcal{O}_{Y,y}$. Si X e Y son los espectros primos de dos anillos A y B, entonces se puede ver que los morfismos de X en Y coinciden exactamente con los morfismos de anillos de B en A, como debe ser.

Como explicábamos antes, si consideramos morfismos $f : X \to S$ sobre un esquema fijado S, S hace el papel de un cuerpo base. Además, si $S = \operatorname{Spec}(A)$, entonces X es un esquema *sobre* S si y solo si el haz de anillos $\mathcal{O}_X$ es un haz de A-álgebras. En la categoría de los esquemas sobre un S dado, existe entonces un producto (que corresponde al producto tensorial de álgebras sobre un anillo conmutativo A). Usando esto, uno puede definir objetos como esquemas de grupos, etc., sobre un esquema base S. Uno también puede usar productos para introducir una condición leve de separación sobre los esquemas, sugerida por la condición usual en la definición de variedad algebraica, obteniendo lo que se puede llamar un *esquema separado*. Un esquema separado se dice que es *noetheriano* si es la unión de un número finito de abiertos isomorfos a espectros primos de anillos *noetherianos*. Un esquema separado X sobre otro S se dice que es de *tipo finito sobre* S (o que el morfismo $f : X \to S$ es de tipo finito) si, para cada abierto afín U en S, $f^{-1}(U)$ es la unión de un número finito de abiertos afines, correspondiendo a álgebras *finitamente generadas* sobre el anillo de U. La mayoría de nociones y resultados de la Geometría Algebraica usual se pueden enunciar y probar ahora en este nuevo contexto, siempre que en algunas cuestiones uno se limite a esquemas separados noetherianos y a morfismos de tipo finito. Destacamos solamente que la noción de variedad *completa* proporciona la noción de *morfismo propio* (que en el caso de la Geometría Algebraica sobre los números complejos es lo mismo que propio en el sentido topológico usual): el morfismo $f : X \to S$ se dice que es propio si es de tipo finito y para cada esquema separado noetheriano Y sobre S, la proyección $X \times_S Y \to Y$ es una aplicación cerrada. También se pueden definir los morfismos proyectivos y casi proyectivos, correspondientes a las nociones de variedades proyectivas y casi proyectivas. Muchas propiedades sobre los morfismos generales se pueden reducir al caso proyectivo o casi proyectivo, usando una generalización apropiada del conocido lema de Chow.

Un haz de módulos $\mathcal{F}$ sobre el esquema separado X se dice que es *casi coherente* si sobre cada abierto afín U de X, está definido por un módulo M sobre el anillo A de U. Si X es noetheriano, entonces $\mathcal{F}$ es coherente (en el sentido general de [**11**]) si y solo si es casi coherente, y los módulos M son finitamente generados. Los haces algebraicos casi coherentes y coherentes se comportan bajo las operaciones de teoría de haces (producto tensorial, haces de morfismos, imágenes directas e inversas, y funtores derivados de los anteriores) tan bien como cabría esperar.

Ya estamos en condiciones de enunciar resultados en el contexto adecuado. Nos limitaremos, sin embargo a (a) y (b). El teorema de Riemann-Roch, probado independientemente por Washnitzer [**19**] y por mí [**2**] en geometría algebraica abstracta, será expuesto por Hirzebruch en este Congreso. Destacamos solamente que la formulación actual de este teorema, sugerida por la fórmula de Hirzebruch, es sustancialmente más fuerte que la última, porque como de costumbre una afirmación sobre una *variedad completa* se sustituye por otra sobre un *morfismo propio*. En cuanto a los 'resultados especiales' aludidos en (d), debidos a Barsotti, Cartier, Rosenlicht y Serre, diremos solo que se puede saber todo lo que cabe desear y esperar sobre la cohomología de una variedad abeliana, y una buena parte de las relaciones entre la cohomolgía de una variedad y la de su variedad de Albanese. En particular, se obtiene por métodos cohomológicos la ausencia de 'torsión' en una variedad abeliana [**1, 3a, 13**] y la bidualidad de las variedades abelianas [**3**]. Por ahora, no se ha abordado la cuestión de enunciar estos resultados en el contexto general de un esquema separado sobre otro, aunque sería bastante razonable.

Los principales resultados en la teoría cohomológica de morfismos de esquemas separados son los siguientes (los Teoremas 1 y 2 son adaptaciones directas de los resultados de Serre [**1**]).

TEOREMA 1. Sea $\mathcal{F}$ un haz casi coherente sobre el esquema separado afín X, definido por un módulo M sobre el anillo de coordenadas A de X. Entonces $H^i(X,\mathcal{F}) = 0$ para $i > 0$, y $H^0(X,F) = M$.

Por supuesto, los grupos de cohomología se toman en el sentido general del álgebra cohomológica en categorías abelianas [**5, 6**]. Es importante por razones técnicas no tomar como *definición* de cohomología la cohomología de Čech, como se hizo en [**11**]; en virtud de la sucesión espectral de Leray para un recubrimiento, el Teorema 1 implica que los grupos de cohomología de un haz casi coherente sobre un esquema separado X se pueden calcular por el método de Čech, pero deberíamos considerar esto como un fenómeno accidental. Hay un recíproco al Teorema 1 [**17**], al efecto de que si X es un esquema noetheriano para el cual $H^1(X,\mathcal{F}) = 0$ para cualquier subhaz coherente de $\mathcal{O}_X$, entonces X es afín. Esto se puede mostrar en el caso general por una adaptación adecuada de la demostración de Serre.

Recordamos que si f es una aplicación continua de un espacio X en otro Y, entonces para cada haz abeliano $\mathcal{F}$ en X, se define la imagen directa $f_*(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ por f como el haz sobre Y cuyas secciones sobre un abierto $U \subset Y$ son las secciones de $\mathcal{F}$ en $f^{-1}(U)$. Tomando los funtores derivados por la derecha del funtor f_*, obtenemos las 'imágenes directas superiores' $R^q f_*(\mathcal{F})$ de F por f. El haz $R^q f_*(\mathcal{F})$ es el haz asociado al prehaz

$$U \to H^q(f^{-1}(U),\mathcal{F}),$$

que es bien conocido por aparecer en el primer témrino de la sucesión espectral de Leray para la aplicación continua f y el haz $\mathcal{F}$. Cuando f es un morfismo de esquemas separados y $\mathcal{F}$ es un haz algebraico, las imágenes directas superiores son haces algebraicos que son casi coherentes cuando $\mathcal{F}$ es casi coherente y f es de tipo finito. En este caso, el grupo de secciones de $R^q f_*(\mathcal{F})$ en un abierto *afín* U de Y es *idéntico* a $H^q(f^{-1}(U),\mathcal{F})$, como se sigue directamente de la sucesión espectral de Leray. El Teorema 1 se generaliza fácilmente a una propiedad de los morfismos afines $f : X \to Y$, esto es, morfismos para los que la imagen inversa de un abierto afín es afín (lo que es una propiedad local respecto de Y): si f es afín, entonces para todo haz casi coherente $\mathcal{F}$ sobre X, tenemos que $R^q f_*(\mathcal{F}) = 0$ para $q > 0$, y el recíproco se cumple cuando X es noetheriano.

El siguiente teorema trata sobre *morfismos proyectivos*. Sea Y un esquema, y sea $\mathcal{S}$ un haz casi coherente de álgebras graduadas en Y. Por simplificar, supondremos que $\mathcal{S}$ solo tiene grados positivo y está generado (como haz de $\mathcal{O}_Y$-álgebras) por $\S^1$. Entonces, generalizando construcciones bien conocidas, se puede definir un esquema X sobre Y (de hecho un esquema separado cuando Y lo es), y sobre X un haz algebraico localmente isomorfo a $\mathcal{O}_X$, denotado por $\mathcal{O}_X(1)$. Más generalmente, para todo haz casi coherente $\mathcal{M}$ de $\mathcal{S}$-módulos graduados, se define un haz casi coherente $F(\mathcal{M})$ sobre X, siendo el funtor $\mathcal{M} \to F(\mathcal{M})$ exacto y compatible con las operaciones usuales de producto tensorial y los haces Tor_i, Hom y Ext^i. Tomando $\mathcal{M} = \mathcal{S}$, se obtiene $\mathcal{O}_X$, y moviendo los grados n unidades en S se obtienen haces $\mathcal{O}_X(n)$, que pueden obtenerse (por lo que acabamos de decir) multiplicando tensorialmente $\mathcal{O}_X(1)$ n veces consigo mismo. Las definiciones son tales que, si f es la proyección $f : X \to Y$, entonces tenemos un morfismo natural (compatible con f) de $\mathcal{M}^0$ en $F(\mathcal{M})$, y por ello también de $\mathcal{M}^n$ en $F(\mathcal{M}(n)) = F(\mathcal{M})(n)$, donde para cada haz algebraico $\mathcal{G}$ sobre X, denotamos por $G(n)$ el producto tensorial $G \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$. El formalismo recién esbozado, y en particular obtener un esquema sobre Y a partir de un haz casi coherente $\mathcal{S}$ de álgebras graduadas sobre Y, debería considerarse como la descripción natural general del proceso de 'explosión': este se obtiene tomando un subhaz coherente $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_Y$, tomando los subhaces $\mathcal{I}^n$ de $\mathcal{O}_Y$ generados por este haz de ideales, y tomando como $\mathcal{S}$ la suma directa de los haces $\mathcal{I}^n$, que es un haz graduado de álgebras en un sentido evidente. Un esquema X sobre Y se dice que es *proyectivo sobre* Y (y el morfismo $f : X \to Y$ se dice que es un *morfismo proyectivo*) si X puede obtenerse, por el proceso aludido arriba, de un haz $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{S}$ es finitamente generado (esto es, un haz coherente cuando Y es noetheriano). Por tanto, si Y es un esquema afín noetheriano separado íntegro (es decir, irreducible y con $\mathcal{O}_Y$ sin nilpotentes), entonces los esquemas separados sobre Y que son proyectivos sobre Y, y para los que la proyección $f : X \to Y$ es una equivalencia birracional, son aquellos que pueden obtenerse de Y por explosión de un haz coherente de ideales en Y (de manera que obtenemos 'prácticamente todos' los morfismos propios birracionales por el proceso estándar de explosión). Nótese que si tomamos como $\mathcal{S}$ el álgebra simétrica de un haz de módulos $\mathcal{N}$ sobre Y localmente libre, entonces el correspondiente X sobre Y debería considerarse como el espacio fibrado con espacios proyectivos como fibras, que corresponde al 'fibrado vectorial' definido por el haz $\mathcal{N}'$ dual de $\mathcal{N}$. (De hecho, todas las construcciones 'geométricas' de la Geometría Algebraica se pueden llevar al contexto de los esquemas). Los hechos más importantes sobre la teoría cohomológica de los morfismos proyectivos están enunciados en el siguiente teorema:

Teorema 2. Sea $f : X \to Y$ un morfismo proyectivo, definido por un haz $\mathcal{S}$ de álgebras graduadas en Y. Supongamos que Y es noetheriano y que $\S^1$ está generado como haz de módulos por r generadores (localmente). Entonces se verifican los siguientes hechos para todo haz coherente $\mathcal{F}$ sobre X:

(i) $\mathcal{F}(n)$ está 'generado por sus secciones' para n grande, siempre que nos restrinjamos a los puntos de X que yacen sobre un abierto *afín* de X;
(ii) $R^q f_*(\mathcal{F}(n)) = 0$ para $q > 0$, n grande;
(iii) $R^q f_*(\mathcal{F}) = 0$ para $q > r$;
(iv) Los haces $R^q f_*(\mathcal{F})$ son coherentes.

El primer enunciado (i) implica también que *todo* haz coherente $\mathcal{F}$ sobre X se puede obtener de cierto haz casi coherente de módulos graduados sobre $\mathcal{S}$.

Los dos siguientes teoremas se prueban tratando primero el caso de un morfismo proyectivo (N. B. los morfismos proyectivos son propios). Entonces los enunciados se reducen a enunciados sobre módulos graduados sobre un anillo de polinomios $A[X_1, \dots, X_n]$ con A noetheriano, y se prueban fácilmente por *inducción decreciente* sobre la dimensión i en la cohomología. Esto explica por qué era imposible obtener un enunciado completo con una demostración simple, incluso para $i = 0$ (esto es, cuando no se trata la cohomología genuina) por métodos no cohomológicos. El caso de un morfismo general se reduce entonces al caso proyectivo por el lema de Chow, como en [**7**].

Teorema 3. Sea $f : X \to Y$ un morfismo propio, con Y noetheriano. Entonces, para cada haz coherente $\mathcal{F}$ sobre X, los haces $R^q f_*(\mathcal{F})$ son coherentes.

Teorema 4. Sean $f : X \to Y$ y $\mathcal{F}$ como antes, y sea y un punto de Y, entonces $R^q f_*(\mathcal{F})_y$ es un módulo finitamente generado sobre el anillo local $\mathcal{O}_y$, y la completación m_y-ádica de este módulo es naturalmente isomorfa a

$$\varprojlim_k H^q(f^{-1}(y), \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_y} (\mathcal{O}_y/m_y^k))$$

(donde m_y es el ideal maximal de $\mathcal{O}_y$).

Esto debería considerarse como el enunciado completo del resultado de Zariski sobre 'funciones holomorfas' [**21**]. Aquí, el grupo lím debería considerarse como la 'cohomología holomorfa' de X a lo largo de la fibra $f^{-1}(y)$, con coeficientes en el haz $\mathcal{F}$. Del Teorema 4 se obtiene un resultado que es global respecto a Y: si Y' es un cerrado de Y, y $X' = f^{-1}(Y')$, entonces la cohomología holomorfa de X a lo largo de X' (con coeficientes en $\mathcal{F}$) es el final de una sucesión espectral de tipo cohomológico, cuyo término inicial es $E_2^{p,q} = H^p(Y/Y', R^q f_*(\mathcal{F}))$ (donde el segundo miembro denota la cohomología holomorfa de Y a lo largo de Y').

El Teorema 4 proporciona directamente el teorema de conexión de Zariski, en la siguiente forma general. Sea $f : X \to Y$ un morfismo propio, con Y noetheriano. Entonces por el Teorema 3, la imagen directa $f_*(\mathcal{O}_X)$ es un haz *coherente* de $\mathcal{O}_Y$-álgebras $\mathcal{B}$ sobre Y. Si $y \in Y$ entonces $\mathcal{B}_y$ es una $\mathcal{O}_y$-álgebra finitamente generada como módulo. Se sigue directamente del Teorema 4 (con $q = 0$) que el conjunto de componentes conexas de la fibra $f^{-1}(y)$ está en correspondencia biunívoca con los ideales maximales de $\mathcal{B}_y$ (que por supuesto son finitos en número). Si, por ejemplo, X e Y son íntegros y f es epiyectivo, entonces el cuerpo K de Y es un subcuerpo del cuerpo L de X, y $\mathcal{B}_y$ es un subanillo de L que es entero sobre el subanillo $\mathcal{O}_y$ de K. Si el cierre entero de $\mathcal{O}_y$ en K tiene solo un ideal maximal (decimos entonces que y es un 'punto unirramificado' de Y) y si el cierre entero de K en L es puramente inseparable sobre K, entonces se sigue directamente que $\mathcal{B}_y$ solo tiene un ideal maximal. Por tanto, la fibra de f en y es conexa. (N. B. no ha hecho falta la irreducibilidad analítica de $\mathcal{O}_y$.)

Podemos afirmarlo de un modo geométrico, usando el hecho de que el haz coherente $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{B}$ de $\mathcal{O}_Y$-álgebras define de modo natural un esquema Y' sobre Y (caracterizado por la condición de que Y' es afín sobre Y y la imagen directa de $\mathcal{O}_{Y'}$ debería ser $\mathcal{B}$). Se sigue de los teoremas de Cohen-Seidenberg que Y' es también propio sobre Y, y que las fibras de la proyección $Y' \to Y$ son finitas. (Recíprocamente, se sigue de los Teoremas 3 y 4) que cualquier Y' sobre Y con estas propiedades se puede definir por un haz coherente de álgebras en Y. Diremos que un tal esquema Y' es *entero sobre* Y.) Usando el isomorfismo $B \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{O}_X)$, se ve que $f : X \to Y$ factoriza de modo natural como $X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Y$, donde ahora f' es tal que $f'_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_{Y'}$. El teorema de conexión de Zariski se puede ahora enunciar de la siguiente manera; las componentes conexas de $f^{-1}(y)$ están en correspondencia biunívoca con los elementos de $g^{-1}(y)$, o equivalentemente: las fibras de f' son conexas. (Esta factorización canónica de f fue sugerida por el trabajo de Stein sobre espacios analíticos.)

Usando los Teoremas 3 y 4 y el teorema de conexión, se obtiene también, por métodos cohomológicos y globales, el enunciado más general del 'teorema principal' de Zariski en álgebra conmutativa, que enunciaremos aquí en lenguaje geométrico:

Teorema 5. Sea $f : X \to Y$ un morfismo casi proyectivo de un esquema separado X en un esquema separado noetheriano Y. Los puntos de X que están aislados en su fibra $f^{-1}(f(x))$ forman un abierto de U. Existen un esquema separado Y' entero sobre Y, y un isomorfismo de U en un abierto U' de Y', tal que la restricción de f a U coincide con la composición $U \to Y' \to Y$.

Este enunciado es algo más general que el enunciado usual puramente local. Debería notarse que los anillos locales de X e Y podrían contener elementos nilpotentes. La prueba del Teorema 5 se obtiene reduciendo primero al caso en que X es propio sobre Y. Entonces Y' es el esquema sobre Y construido arriba con el haz $f_*(\mathcal{O}_X)$, y el hecho de que la factorización canónica de f induce un isomorfismo de U en un abierto de Y' se deduce fácilmente del teorema de conexión. El hecho de que deberían existir pruebas cohomológicas del teorema de conexión de Zariski y de su 'teorema principal' fue conjeturado primero por Serre. El que estos resultados son válidos para esquemas generales, no solo para los de la geometría algebraica, proporciona resultados como el siguiente (que entiendo que se debe a Chow): sea A un anillo íntegro local noetheriano que es normal (o más generalmente, 'unirramificado'); entonces el espacio proyectivo algebraico sobre el cuerpo residual k de A definido por la k-álgebra graduada $G(A) =\sim \mathfrak{m}^n \,/\, \mathfrak{m}^{n+1}$ ($\mathfrak{m}$ = ideal maximal de A) es conexo.

Quedan por decir algunas palabras sobre los teoremas de dualidad, aunque el tiempo no nos permite dar enunciados precisos. Recordamos primero el enunciado original de Serre [**22**]: si X^n es una variedad proyectiva no singular definida sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k y E es un fibrado vectorial sobre X, entonces hay una dualidad natural entre $H^i(X, \mathcal{O}_X(E))$ y $H^{n-i}(X, \Omega^n_X(E'))$, donde $\mathcal{O}_X(E)$ es el haz de gérmenes de secciones regulares de E, y $\Omega^n_X(E')$ el haz de gérmenes de n-formas diferenciales en X con valores en el fibrado vectorial dual E'. Esta dualidad se obtiene por el producto cup, usando el hecho de que $H^n(X, \Omega^n_X)$ es canónicamente isomorfo al cuerpo base k. Varias generalizaciones de este resultado y aplicaciones a la dualidad de Poincaré (incluyendo una fórmula de Lefshetz) fueron dadas en [**8**]. Sin embargo, el caso de variedades singulares no fue tenido en cuenta, así que los enunciados de dualidad de Poincaré fueron restringidos sin necesidad a ciclos no singulares e intersecciones no singulares de dichos ciclos. Además, los fundamentos algebraicos apropiados para los aspectos *covariantes* de la cohomología de variedades no singulares, sugeridos por la dualidad de Poincaré, seguían sin estar claros. Vía el desarrollo de una teoría general de residuos, esta situación se puede considerar como (potencialmente) completamente aclarada. Para simplificar, consideremos esquemas separados de tipo finito sobre un cuerpo base arbitrario k, esto es, espacios algebraicos definidos sobre k, admitiendo que los anillos locales de X contengan elementos nilpotentes (lo que técnicamente es de gran importancia). Entonces, en un tal X, hay definido canónicamente un complejo de haces casi coherentes $\mathcal{K}_X$, con grados positivos, y un operador diferencial de grado -1. En dimensión i, $\mathcal{K}_X$ es la suma directa de los haces $\mathcal{D}(X/Y)$, donde Y recorre todos cerrados irreducibles de X de dimensión i. El haz $\mathcal{D}(X/Y)$ es la extensión a X de un haz *constante* en Y, correspondiente a un módulo sobre el anillo local $\mathcal{O}_{X/Y}$ de Y en X, que deberíamos llamar el *módulo dual* de este anillo local. En general, si A es una localidad, sobre el cuerpo base k (esto es, el anillo local de una k-álgebra finitamente generada), hay un A-módulo bien definido $D(A)$, llamado su dual (respecto a k), que podemos obtener de la siguiente forma: tomamos un subcuerpo L de A separable sobre k tal que el cuerpo residual de A sea algebraico sobre L, entonces

$$D(A) = \mathrm{Hom}_L(A, \Omega^p(L)),$$

donde Hom denota los morfismos *continuos*, y donde $\Omega^p(L)$ es el espacio vectorial (unidimensional) sobre L de las formas diferenciales de grado máximo de L respecto de k. (El hecho de que el segundo miembro no depende de L no es trivial, y se obtiene como consecuencia de una definición cohomológica alternativa de $D(A)$ como límite directo de módulos Ext.) El haz $\mathcal{K}_X$ es un haz *inyectivo* de $\mathcal{O}_X$-módulos. La definición de su operador diferencial es bastante sutil. El complejo de haces debería ser llamado el *complejo residual* de X (o complejo de 'datos generalizados de Cousin' de X). Resulta que si X es no singular y separable sobre k, entonces $\mathcal{K}_X$ es una *resolución* (inyectiva) del haz Ω^n_X de gérmenes de formas diferenciales de grado máximo sobre X. En cualquer caso, si $\dim X = n$, entonces el haz de circlos de grado n en $\mathcal{K}_X$, denotado por ω_X, debería considerarse que hace el papel de las formas diferenciales de grado n en X. De hecho, hay un morfismo natural (definido por el proceso de Kähler bien conocido) de Ω^n_X en ω_X; si X es normal y separable sobre k, entonces ω_X no es más que el haz de gérmenes de formas diferenciales en X que son regulares en los puntos simples. Por otro lado, si X es Cohen-Macaulay (esto es, si sus anillos son Cohen-Macaulay), entonces $\mathcal{K}_X$ es una resolución de ω_X (y recíprocamente). Esto muestra que en general los haces $H_i(\mathcal{K}_X)$ no son cero aunque $i \neq n$ (N.B. nunca lo son para $i = n$), no obstante, estos haces siempre son coherentes (aunque $\mathcal{K}_X$ es demasiado grande para ser coherente).

Sea ahora $\mathcal{F}$ un haz coherente arbitrario en X, escribamos

$$H_i(X, \mathcal{F}) = H_i(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(X; \mathcal{F}, \mathcal{K} : X)).$$

De modo que la *homología* de X con coeficientes en $\mathcal{F}$ se define como un funtor *contravariante* en $\mathcal{F}$, que además es un 'funtor homológico' porque el complejo $\mathcal{K}_X$ es inyectivo, esto es, $\mathcal{F} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(X; \mathcal{F}, \mathcal{K}_X)$ es exacto. Tiene todas las propiedades que uno espera de la homología, en particular, es *covariante* con X respecto a morfismos *propios* (porque el haz $\mathcal{K}_X$ se comporta covariantemente con X), la cohomología de X opera en la homología por *producto cap*. También se pueden definir grupos de homología y cohomologia relativas de varios tipos. Si X es Cohen-Macaulay, entonces la definición de arriba da

$$H_i(X, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Ext}^{n-i}_{\mathcal{O}_X}(X; \mathcal{F}, \omega_X). \tag{0.1}$$

Esta relación se reemplaza por una sucesión espectral en el caso general. Si X es Cohen-Macaulay y además $\mathcal{F}$ es localmente libre, entonces la relación de arriba da

$$H_i(X, \mathcal{F}) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{F}' \otimes \omega_X) \tag{0.2}$$

así que en este caso, la homología se puede expresar como cohomología. En el caso general, esta relación se reemplaza por una sucesión espectral, análoga a la sucesión espectral de Cartan para un espacio topológico arbitrario, que conecta su homología y su cohomología (y da la dualidad de Poincaré cuando el espacio es una variedad).

Usando las definiciones de H_n y ω_X, vemos que (si $\dim X = n$) hay un elemento canónico en $H_n(X, \omega_X)$, llamado la *clase canónica de homología* de X; como la homología es contravariante en el argumento, se sigue que para cada $p-$*ciclo* Z en X, hay una clase de homología $\gamma_X(Z)$ en $H_p(X, \Omega_X^p)$. La formación de estas clases es compatible con las imágenes directas de ciclos y clases de homología. Además, si X es no singular y separable sobre k, entonces $\gamma(Z)$ se puede ver como un elemento de $H^{n-p}(X, \Omega_X^{n-p})$ en virtud de (0.2). Usando algunos hechos simples de carácter local que conectan la intersección y las imágenes inversas de ciclos con alguna estructura multiplicativa parcialmente definida en $\mathcal{K}_X$ (para X no singular), obtenemos que la formación de clases características es compatible con productos e imágenes inversas (lo que resuelve las dificultades encontradas en [**8**]).

El teorema de dualidad de Serre se generaliza ahora de la siguiente manera. Supongamos que $\mathcal{F}$ es un haz coherente en X con soporte completo, entonces por producto cap hay una aplicación bilineal

$$H_i(X, \mathcal{F}) \times H^i(X, \mathcal{F}) \to H_0(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{I}), \tag{0.3}$$

donde $\mathcal{I}$ es cualquier haz coherente de ideales en X tal que $\mathcal{I} \cdot \mathcal{F} = 0$. Podemos tomar $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ tiene soporte completo, es decir, tal que es el haz de anillos locales de un subespacio algebraico Y de X. Entonces el segundo miembro de (0.3) no es más que $H_0(Y, \mathcal{O}_Y)$, y usando la suma de residuos obtenemos un k-morfismo canónico

$$H_0(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{I}) = H_0(Y, \mathcal{O}_Y) \to k. \tag{0.4}$$

Usando (0.3) y (0.4), obtenemos una forma bilineal

$$H_i(X, \mathcal{F}) \times H^i(X, \mathcal{F}) \to k \tag{0.5}$$

Esta forma bilineal es no degenerada: por tanto, para soportes completos, la homología y la cohomología son duales entre sí. Además, en esta dualidad, la imagen directa de homología se traspone a la imagen inversa de cohomología (como se requiere en el formalismo de la dualidad de Poincaré).

Hemos resumido el enunciado de resultados para esquemas separados de tipo finito sobre un cuerpo k. De hecho son válidos resultados más generales, y el teorema de dualidad se puede enunciar para cualquier haz coherente $\mathcal{F}$ en un esquema separado noetheriano X, tal que el soporte de $\mathcal{F}$ sea completo (esto es, propio sobre algún anillo artiniano A, no necesariamente un cuerpo). Combinando esto con el Teorema 4, obtenemos un enunciado equivalente, relativo a las propiedades homológicas de un morfismo propio arbitrario (siendo el esquema base Y noetheriano).

Para concluir esta charla, debería enunciar algunos problemas abiertos. De hecho quizás es demasiado pronto para hacerlo, porque las técnicas nuevas aún no se han probado seriamente lo bastante para saber si con ellas se pueden resolver o no estas cuestiones. Las dos siguientes cuestiones (que probablemente están relacionadas) quizás opongan algo de resistencia. Por brevedad, las enunciaremos en el contexto de la Geometría Algebraica.

PROBLEMA *A*. (teorema de anulación de Kodaira) Sean V una variedad proyectiva no singular, L un fibrado de línea negativo sobre V (es decir, tal que algún múltiplo negativo de L define una inmersión proyectiva de V). Si V es de dimensión n, ¿es cierto que $H^i(X, \mathcal{O}_X(L)) = 0$ para $0 \leq i < n$?

No es difícil ver, usando dualidad, que este problema equivale al siguiente, en el que no interviene la cohomología: Sean V y L como antes, y sea W una sección hiperplana de V (respecto de cierta inmersión proyectiva de V). Entonces, ¿es cierto que toda $(n-1)$-forma regular sobre W con coeficientes en L, es el residuo de una n-forma diferencial racional sobre V, con coeficientes en L, teniendo divisor $\geq -W$?

PROBLEMA *B*. Sea f un morfismo propio birracional de una variedad no singular X en otra Y. ¿Es cierto que $R^q f_*(\mathcal{O}_X) = 0$ para $q > 0$?

Usando la sucesión espectral de Leray, esto equivale al siguiente problema: si $f : X \to Y$ es como antes, ¿es cierto que $H^p(X, \mathcal{O}_X) \xleftarrow{\sim} H^p(Y, \mathcal{O}_Y)$ para todo p? Más generalmente, se seguiría que si E es un fibrado vectorial sobre Y y F es su imagen inversa en X, entonces $H^p(X, \mathcal{O}_X(F)) \xleftarrow{\sim} H^p Y, \mathcal{O}_Y(E)$ ('invariancia birracional de la cohomología'). Implicaría que el género aritmético de una variedad completa no singular es un invariante birracional (esto solo se sabe en el caso clásico cuando k es el cuerpo de números complejos y X es proyectiva, usando la simetría $h^{0,p} = h^{p,0}$), más generalmente que (f es como antes) las clases de Todd de Y son las imágenes directas por f de las clases de Todd de X (como se ve aplicando la fórmula de Riemann-Roch [**2**]). La respuesta al Problema B no se conoce incluso para variedades proyectivas no singulares sobre el cuerpo de números complejos. Debería notarse que, para que el enunciado fuera cierto, tanto X como Y deberían ser no singulares.

Hay algunas otras cuestiones en las que los métodos cohomológicos y la intuición heurística que proporciona el punto de vista de esquemas probablemente serán de ayuda. Las más importantes actualmente parecen ser las siguientes.

PROBLEMA *C*. Sea X un esquema separado noetheriano, Y un subesquema separado completo. Encuéntrense condiciones bajo las cuales es posible 'implosionar' Y a un punto, es decir, encontrar un morfismo propio de X en otro esquema separado X' que transforme Y en un solo punto y y que induzca un isomorfismo de $X - Y$ en $X' - (Y)$.

Según Grauert, este problema está estrechamente relacionado con el problema A. Además, está conectado con la teoría de funciones holomorfas de Zariski, siendo necesario (pero no suficiente) para que la implosión sea posible lo siguiente (en virtud del Teorema 4): el anillo de funciones holomorfas de X a lo largo de Y debe ser noetheriano y con dimensión de Krull igual a $\dim X$.

PROBLEMA *D*. Sea G un esquema de grupos separado de tipo finito sobre el esquema separado Y, sea H un subesquema de grupos separado cerrado en G. Pruébese la existencia del esquema G/H sobre X (definido por las propiedades universales usuales).

PROBLEMA E. Sea X un esquema separado propio sobre otro esquema separado Y (noetheriano). Pruébese la existencia de un esquema de grupos abelianos separado sobre Y, que haga el papel de una variedad de Picard relativa con respecto a la determinación de haces localmente libres de rango uno sobre productos $X \times_Y Z$ (siendo Z un 'esquema separado de parámetros' sobre Y variable).

No daremos aquí la definición precisa de 'esquema de Picard relativo', pero destacaremos que si este esquema existe, entonces se comporta de la forma más simple imaginable respecto al cambio de base Y (que debería verse como el análogo al cambio de cuerpo base). Además, el hecho de que admitimos elementos nilpotentes en los anillos locales de los esquemas Z proporciona una gran cantidad de información suplementaria sobre la variedad de Picard (particularmente su estructura infinitesimal), lo que no parece haber sido obtenido hasta ahora ni en el caso clásico. Estas observaciones siguen siendo válidas al considerar la siguiente situación más general: Dado un esquema de grupos G sobre X (G de tipo finito sobre X), para cada Z sobre Y, consideramos en $X \times_Y Z$ la imagen inversa G^Z de G por la proyección $X \times_Y Z \to X$ y las clases de isomorfismos de esquemas separados sobre $X \times_Y Z$ que son principales bajo G^Z. Esto conduce a una definición generalizada de la variedad de Picard relativa de X, con respecto a G, que debería ser un esquema sobre Y, y un esquema de grupos abelianos sobre Y si G es abeliano. Esperamos que un teorema general de existencia de tales esquemas de Picard relativos será probado en el futuro.

Como hecho bastante general, creemos que se obtendrá una comprensión mejor de cualquier parte de incluso la Geometría Algebraica más clásica al intentar reenunciar todos los hechos y problemas conocidos en el contexto de esquemas. Este trabajo ya ha comenzado, y será llevado a cabo en un tratado de Geometría Algebraica que, ojalá, será escrito en los próximos años por J. Dieudonné y yo mismo, y que esperamos dará una exposición sistemática de todas las cuestiones discutidas en esta charla.

Bibliografía

[1] Barsotti, I. Variedades abelianas sobre cuerpos de característica positiva. *R. C. Circ. mat. Palermo*, (2), 5, 1.25 (1956)

[2] Borel, A. y Serre, J. P. El teorema de Riemann-Roch. *Bull. Soc. Math. Fr.* 86, 97-136 (1958).

[3] Cartier, P. Tesis. Paris, 1959.

[3a] Cartier, P. *Seminario Bourbaki.* (Mayo, 1958).

[4] Chevalley, C. y Cartan, H. *Seminario Escuela Normal Superior* (1955-56)

[5] Godement, R. Topología algebraica y teoría de haces. *Act. Sci. Ind.* no. 1252. Hermann, París, 1958.

[6] Grothendieck, A. Sobre algunas cuestiones de álgebra homológica. *Tôhoku Math. J.* 9, nos. 2-3, 119-221 (Agosto, 1957).

[7] Grothendieck, A. Sobre los haces algebraicos y los haces analíticos coherentes. *Seminario Cartan*, 1956-56, exposé 2.

[8] Grothendieck, A. Teoremas de dualidad para los haces algebraicos coherentes. *Seminario Bourbaki*, 1956-56 (Mayo, 1957)

[9] Nagata, M. Teoría general de geometría algebraica sobre dominios de Dedekind. *Amer. J. Math.* 78, 78-116 (1956).

[10] Rosenlicht, M. Extensiones de grupos vectoriales por variedades abelianas. *Amer. J. Math.* 80, 685-714 (1958).

[11] Serre, J. P. Haces algebraicos coherentes. *Ann. Math.* (2), 61, 197-278 (1955).

[12] Serre, J. P. Sobre la topología de variedades algebraicas en característica *p. Simpósio de Topología Algebraica, México.* (Agosto 1956).

[13] Serre, J. P. Algunas propiedades de las variedades abelianas en característica *p. Amer. J. Math.* 80, (1958).

[14] Serre, J. P. Sobre la dimensión cohomológica de los anillos y módulos noetherianos. *Proc. Int. Simp. Teoría Algebraica de Números, Tokio-Nikko*, pp. 175-189 (1955).

[15] Serre, J. P. Teoría de intersecciones. Curso impartido en el Colegio de Francia 1957/58, dirigido por P. Gabriel.

[16] Serre, J. P. Grupos algebraicos y cuerpos de clases, según un curso impartido en el Colegio de Francia.

[17] Serre, J. P. Sobre la cohomología de variedades algebraicas. *J. Math. puras y apl.* 36, 1-16 (1957).

[18] Tate, J. Grupos de tipo Galois y dimensión cohomológica de cuerpos.

[19] Washnitzer, A. Sizigias geométricas. *Amer. J. Math.* 81, 171-248 (1959).

[20] Weil, A. Geometría algebraica abstracta versus clásica. *Proc. Int. Congr. Mat.h Amst.* 3, 550-558 (1954)

[21] Zariski, O. Teoría y aplicaciones de las funciones holomorfas en variedades algebraicas sobre cuerpos cualesquiera. *Mem. Amer. Math. Soc.* nº 5, (1951).

[22] Zariski, O. Informe científico en el segundo Instituto de verano. III. Teoría de haces algebraicos. *Bull. Amer. Math. Soc.* (2), 62, 117-141 (1956).

[23] Auslander, M. y Buchsbaum, R. A. Multiplicidad y codimensión. *Ann. Math.* (2), 68, 625-657 (1958).